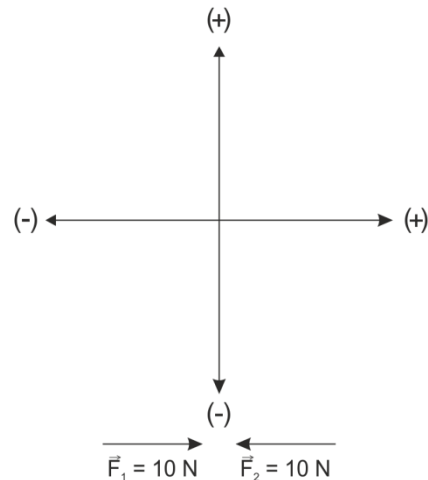




CARACTERÍSTICAS DE UN VECTOR

Un vector cualquiera tiene las siguientes características:

1. Punto de aplicación u origen.
2. Magnitud, intensidad o módulo del vector. Indica su valor y se representa por la longitud del vector de acuerdo con una escala convencional.
3. Dirección. Señala la línea sobre la cual actúa, puede ser horizontal, vertical u oblicua.
4. Sentido. Indica hacia dónde va el vector, ya sea hacia arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda, y queda señalado por la punta de la flecha. El sentido del vector se identifica en forma convencional con signos (+) o (-) según a donde vaya.



Estos dos vectores tienen la misma dirección y magnitud, pero diferente sentido.

CÓMO ESTABLECER LA ESCALA DE UN VECTOR

Para representar un vector necesitamos una escala convencional, la cual estableceremos según nuestras necesidades, de acuerdo con la magnitud del vector y el tamaño que se le desee dar. Si queremos representar un vector en una cartulina no usaremos la misma escala que si lo hacemos en una hoja de nuestro cuaderno. Por ejemplo, si se desea representar en la cartulina un vector fuerza de 350 N dirección horizontal y sentido positivo, podemos usar una escala de 1 cm igual a 10 N; así, con sólo medir y trazar una línea de 35 cm estará representado. Pero en nuestro cuaderno esta escala sería muy grande, lo recomendable es una escala de 1 cm = 100 N para que al medir 3.5 cm esté representado nuestro vector de la siguiente manera:

$$\text{Escala: } 1 \text{ cm} = 100 \text{ N}$$

$$F = 350 \text{ N (longitud del vector: } 3.5 \text{ cm)}$$

En general lo recomendable es usar escalas de 1:1, 1:10, 1:100 y 1:1000, siempre que sea posible. Por ejemplo, si tenemos cuatro vectores, todos ellos de dirección horizontal y con sentido (+), cuyos valores son:

$$\vec{F}_1 = 3.5 \text{ N}; \quad \vec{F}_2 = 40 \text{ N};$$

$$\vec{F}_3 = 580 \text{ N}; \quad \vec{F}_4 = 4200 \text{ N};$$

y queremos representarlos gráficamente e individualmente en nuestro cuaderno, las escalas recomendables serían:

$$\text{Para } \vec{F}_1: 1 \text{ cm} = 1 \text{ N}; \quad \text{Para } \vec{F}_2: 1 \text{ cm} = 10 \text{ N}$$

$$\text{Para } \vec{F}_3: 1 \text{ cm} = 100 \text{ N} \quad \text{Para } \vec{F}_4: 1 \text{ cm} = 1000 \text{ N}$$

VECTORES COPLANARES Y NO COPLANARES

Los vectores pueden clasificarse en coplanares, si se encuentran en el mismo plano, o en dos ejes, y no coplanares si están en diferente plano, es decir, en tres ejes.

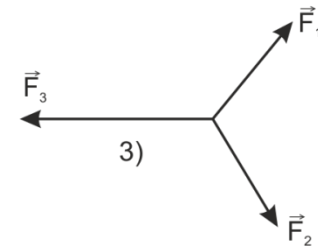
SISTEMA DE VECTORES COLINEALES

Se tiene un sistema de vectores colineales cuando dos o más vectores se encuentran en la misma dirección o línea de acción. Un vector colineal será

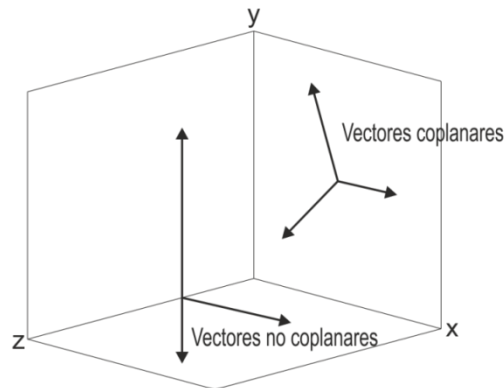
positivo si su sentido es hacia la derecha o hacia arriba, y negativo si su sentido es hacia la izquierda o hacia abajo.

SISTEMA DE VECTORES CONCURRENTES

Un sistema de vectores es concurrente cuando la dirección o línea de acción de los vectores se cruza en algún punto; el punto de cruce constituye el punto de aplicación de los vectores. A estos vectores se les llama angulares o concurrentes, porque forman un ángulo entre ellos.



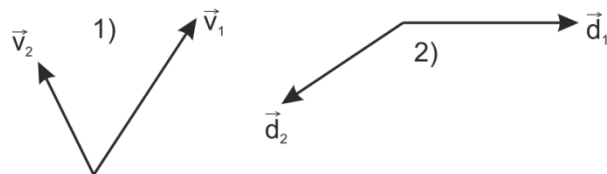
Tres ejemplos de vectores concurrentes o angulares.



Ejemplo de vectores coplanares y no coplanares.



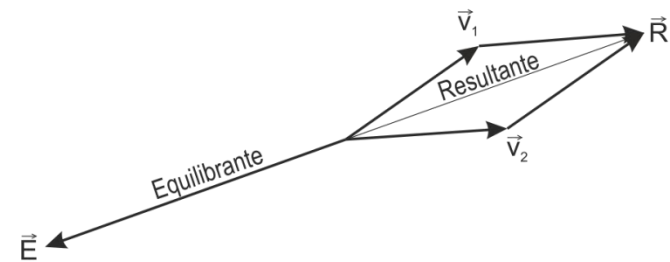
Sistema de vectores colineales.



RESULTANTE Y EQUILIBRANTE DE UN SISTEMA DE VECTORES

La resultante de un sistema de vectores es el vector que produce él solo, el mismo efecto que los demás vectores del sistema. Por ello, un vector resultante es aquél capaz de sustituir un sistema de vectores.

La equilibrante de un sistema de vectores, como su nombre J_0 indica, es el vector encargado de equilibrar el sistema. Por tanto, tiene la misma magnitud y dirección que la resultante, pero con sentido contrario.

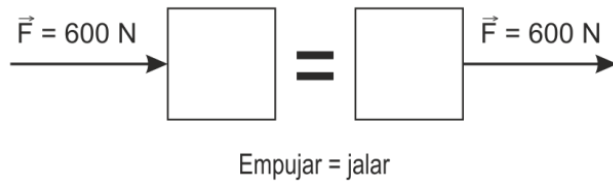


Resultante y equilibrante de un sistema de vectores. Tienen la misma magnitud y dirección, pero diferente sentido.

PROPIEDADES DE LOS VECTORES

Propiedad de transmisibilidad del punto de aplicación.

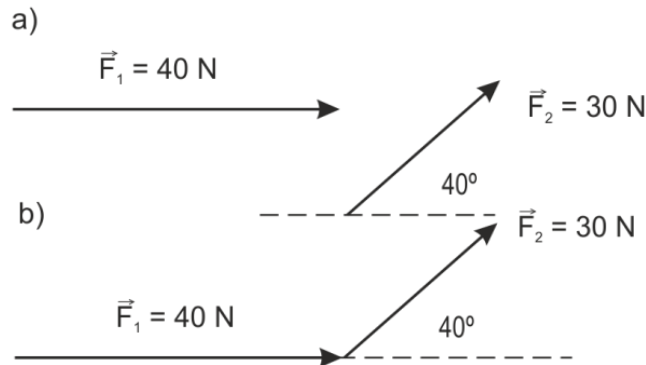
El efecto externo de un vector no se modifica si es trasladado en su misma dirección, es decir, sobre su propia línea de acción. Por ejemplo, si se desea mover un cuerpo horizontalmente, aplicando una fuerza, el resultado será el mismo si empujamos el cuerpo o si lo jalamos.



Propiedad de transmisibilidad del punto de aplicación de un vector.

Propiedad de los vectores libres

Los vectores no se modifican si se trasladan paralelamente a sí mismos. Esta propiedad la utilizaremos al sumar vectores por los métodos gráficos del paralelogramo, triángulo y polígono.



Propiedad de los vectores libres. En (a) vemos dos vectores libres, en (b) los vectores no se modifican si se trasladan paralelamente a sí mismos.

SUMA DE VECTORES

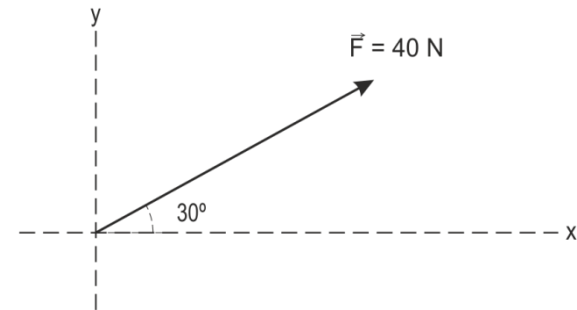
Cuando necesitamos sumar dos o más magnitudes escalares de la misma especie lo hacemos aritméticamente. Por ejemplo, $2 \text{ kg} + 5 \text{ kg} = 7 \text{ kg}$; $20 \text{ m}^2 + 10 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 = 35 \text{ m}^2$; $3 \text{ h} + 4 \text{ h} = 7 \text{ h}$; $200\text{K} + 100\text{K} = 300\text{K}$. Sin embargo, para sumar magnitudes vectoriales, que como ya mencionamos aparte de magnitud tienen dirección y sentido, debemos utilizar métodos diferentes a una simple suma aritmética. Estos métodos pueden ser gráficos o analíticos, pero en ambos casos se consideran además de la magnitud del vector, su dirección y sentido.

COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR DE VECTORES

Un sistema de vectores puede sustituirse por otro equivalente, el cual contenga un número mayor o menor de vectores que el sistema considerado. Si el sistema equivalente tiene un número mayor de vectores, el procedimiento se llama descomposición. Si el sistema equivalente tiene un número menor de vectores, el procedimiento se denomina composición.

Se llaman componentes de un vector aquellos que lo sustituyen en la descomposición. Por ejemplo: Encontrar gráfica y analíticamente las componentes rectangulares del siguiente vector:

Escala: 1 cm = 10 N

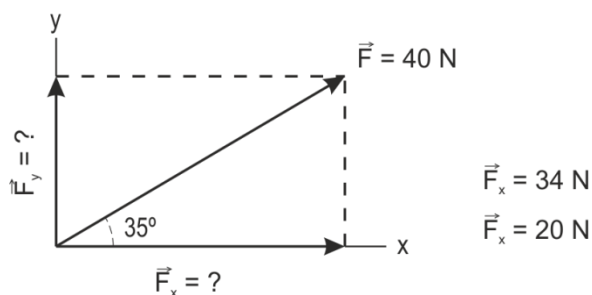


Solución por el método gráfico

Para encontrar en forma gráfica los componentes rectangulares o perpendiculares del vector, primero tenemos que establecer una escala. Para este caso puede ser: 1 cm = 10 N.

Trazamos nuestro vector al medir el ángulo de 30° con el transportador. Después, a partir del extremo del vector, trazamos una línea hacia el eje de las X y otra hacia el eje de las Y. En el punto de intersección del eje X quedará el extremo del vector componente \vec{F}_x . En el punto de intersección del eje Y quedará el extremo del vector componente \vec{F}_y . En ambos componentes su origen será el mismo que tiene el vector $\vec{F} = 40 \text{ N}$, el cual estamos descomponiendo:

Escala: 1 cm = 10 N



Para encontrar el valor de la componente en X del vector \vec{F} o sea, \vec{F}_x , basta medir con la regla la longitud, y de acuerdo con la escala encontrar su valor. En este caso mide aproximadamente 3.4 cm que representan 34 N.

Para hallar el valor de la componente en Y del vector \vec{F} o sea, \vec{F}_y , es suficiente medir con la regla la longitud, y según la escala encontrar su valor que en este caso es de casi 2.0 cm, es decir, de 20 N.

Solución por el método analítico

A fin de determinar el valor de las componentes en forma analítica observemos que se forma un triángulo rectángulo al proyectar una línea hacia el eje de las X y otro al proyectar una línea hacia el eje de las Y. Trabajaremos sólo con el triángulo rectángulo formado al proyectar la línea hacia el eje de las X. Las componentes perpendiculares del vector \vec{F} serán: para \vec{F}_x , el cateto adyacente y para \vec{F}_y , el cateto opuesto al ángulo de 30° . Por tanto, debemos calcular cuánto valen estos dos catetos; para ello, utilizaremos las funciones trigonométricas seno y coseno.

Cálculo de \vec{F}_y :

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\vec{F}_y}{\vec{F}}$$

despejamos \vec{F}_y :

$$\vec{F}_y = \vec{F} \text{ sen } 30^\circ = 40 \text{ N} \times 0.5 = 20 \text{ N}$$

Cálculo de \vec{F}_x :

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\vec{F}_x}{\vec{F}}$$

despejamos \vec{F}_x :

$$\vec{F}_x = \vec{F} \text{ cos } 30^\circ = 40 \text{ N} \times 0.8660 = 34.64 \text{ N}$$

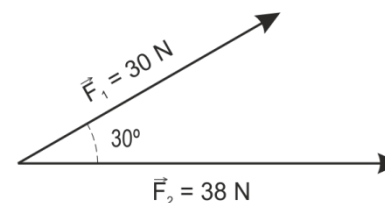
Si comparamos los dos resultados obtenidos para calcular el valor de \vec{F}_y y \vec{F}_x , en forma gráfica y analítica, encontraremos una pequeña diferencia. Esto se explica si consideramos que al hallar las componentes en forma gráfica estamos expuestos a cometer errores al trazar el vector y al medir el valor de las componentes. En cambio, en forma analítica se eliminan estos errores y el valor de las componentes es obtenido con mayor precisión.

SUMA DE VECTORES CONCURRENTES

Cuando en forma gráfica se desean sumar dos vectores concurrentes se utiliza el método del paralelogramo, mientras que para encontrar la resultante por el método analítico se usará el teorema de Pitágoras si los dos vectores forman un ángulo de 90° , pero si originan cualquier otro ángulo se usará la Ley de los Cosenos y para calcular el ángulo de la resultante se aplicará la Ley de los Senos.

Ejemplo:

Por el método gráfico y analítico hallar la resultante y el ángulo que forma con la horizontal en la siguiente suma de vectores:

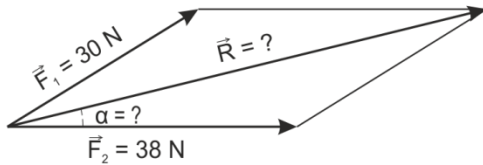


Método gráfico

Establecemos primero la escala y trazamos los vectores con su ángulo de 30° .

Dibujamos la paralela de cada vector y obtenemos el paralelogramo. Medimos la resultante y el ángulo formado.

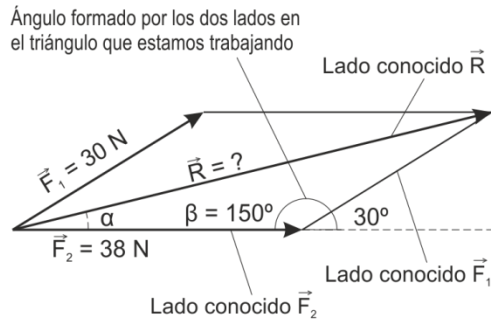
Escala: 1 cm = 10 N



Respuesta:
 $\vec{R} = 65 \text{ N}$
 $\alpha = 13.2^\circ = 13^\circ 12'$

Método analítico

Para calcular la resultante debemos encontrar uno de los tres lados de un triángulo oblicuo, cuyos lados conocidos son \vec{F}_1 y \vec{F}_2 . Aplicamos la ley de los cosenos, tomando en cuenta que en el triángulo oblicuo el ángulo β formado por los dos vectores es de 150° . Veamos:



Aplicamos la ley de los cosenos para encontrar la resultante:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta}$$

Sustituyendo:

$$R = \sqrt{30^2 + 38^2 - 2 \times 30 \times 38 \times \cos 150^\circ}$$

Como el ángulo formado por los dos lados conocidos es mayor de 90° , buscaremos el coseno de 150° de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\cos 150^\circ = -\cos (180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ$$

leemos en las tablas el valor del coseno del ángulo de 30° y le agregamos el signo menos:

$$\cos 30^\circ = 0.8660 \quad \therefore -\cos 30^\circ = -0.8660$$

$$R = \sqrt{900 + 1444 - 2 \times 30 \times 38 \times -0.8660} = \sqrt{2344 + 1974.48}$$

$$= \sqrt{4318.48} = 65.715 \text{ N}$$

Para calcular el ángulo α que forma la resultante con respecto a la horizontal, aplicamos la ley de los senos:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} \quad \therefore \sin \alpha = \frac{F_1 \sin \beta}{R}$$

Como $\beta = 150^\circ$ tenemos que $\sin \beta = \sin 150^\circ$.

Como el ángulo es mayor de 90° encontramos el valor del $\sin 150^\circ$ de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = 0.5$$

Sustituyendo:

$$\sin \alpha = \frac{30 \text{ N} \times 0.5}{65.715 \text{ N}} = 0.2282$$

$\alpha =$ ángulo cuyo seno es 0.2282

$$\alpha = 13.2^\circ = 13^\circ 12'$$

SUMA DE MÁS DE DOS VECTORES CONCURRENTES

Método gráfico del polígono

Para sumar más de dos vectores concurrentes en forma gráfica, se utiliza el llamado método del polígono. Dicho método consiste en trasladar paralelamente a sí mismo cada uno de los vectores sumados, de tal manera que al tomar uno de los vectores como base los otros se colocarán uno a continuación del otro, poniendo el origen de un vector en el extremo del otro

y así sucesivamente hasta colocar el último vector. La resultante será el vector que una el origen de los vectores con el extremo libre del último vector sumado y su sentido estará dirigido hacia el extremo del último vector.

MÉTODO DEL TRIÁNGULO

El método del triángulo se utiliza para sumar o restar vectores que no tienen ningún punto en común. Este método se basa en el principio de los vectores libres, ya mencionado anteriormente.

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

El producto de un escalar k y de un vector \vec{r} se escribe: $k\vec{r}$ y se define como un nuevo vector cuya magnitud es k veces la magnitud de \vec{r} .

Por ejemplo:

$$\text{Si } \vec{r} = 5 \text{ N y } k = 6$$

$$k\vec{r} = 6 \times 5 \text{ N} = 30 \text{ N}$$

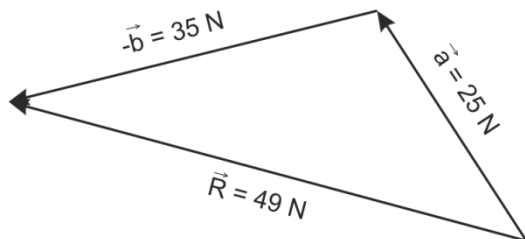
De manera que el nuevo vector es opuesto al vector \vec{r} con la misma magnitud y dirección, pero con sentido contrario. A este nuevo vector se le da el nombre de vector simétrico y la suma de dos de ellos es igual a cero:

$$\vec{r} + (-\vec{r}) = 0$$

De acuerdo con el concepto visto podemos definir la resta de dos vectores como la suma al vector minuendo del vector simétrico del sustraendo:

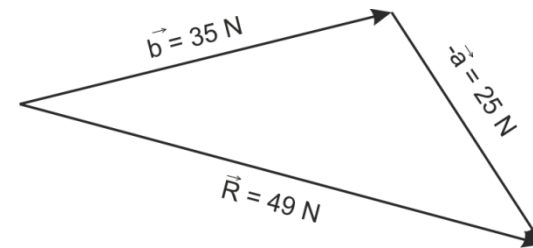
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Por tanto, la resta de los vectores $\vec{a} - \vec{b}$ del ejemplo es:



La resta de los vectores $\vec{b} - \vec{a}$ es:

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$$



PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El producto escalar de dos vectores, llamado también producto punto, da como resultado una magnitud escalar, pues carece de dirección y sentido. Por definición, el producto escalar de dos vectores es igual a multiplicar la magnitud de un vector por la componente perpendicular del otro vector en la dirección del primero. De donde:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab \cos \theta$$

Algunas magnitudes físicas que resultan del producto escalar de dos vectores son: el trabajo mecánico, la potencia eléctrica y la densidad de energía electromagnética.

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

El producto vectorial de dos vectores, llamado también producto cruz, da como resultado otro vector, el cual siempre es perpendicular al plano formado por los dos vectores que se multiplican.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

Por definición, la magnitud del producto vectorial de dos vectores es igual a multiplicar la magnitud de un vector por la componente perpendicular del otro con respecto al primero.

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab \sin \theta$$

En el producto vectorial el orden de los factores debe tomarse en cuenta, pues no es lo mismo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ o que $\vec{b} \cdot \vec{a}$.

En el producto vectorial de \vec{a} y \vec{b} la multiplicación de $ab \sin \theta$ nos proporciona únicamente la magnitud del vector \vec{c} . porque si deseamos conocer su sentido se debe usar la regla de la mano derecha. La dirección, como ya mencionamos, siempre es perpendicular al plano formado por los vectores que se multiplican.

Algunas magnitudes físicas que resultan del producto vectorial son: el momento estático, la fuerza que recibe una carga en movimiento al penetrar a un campo magnético y la cantidad de movimiento angular.

EJEMPLO 1

Un jinete y su caballo cabalgan 3 km al Norte y después 4 km al Oeste. Calcular:

- ¿Cuál es la distancia total que recorren?
- ¿Cuál fue su desplazamiento?

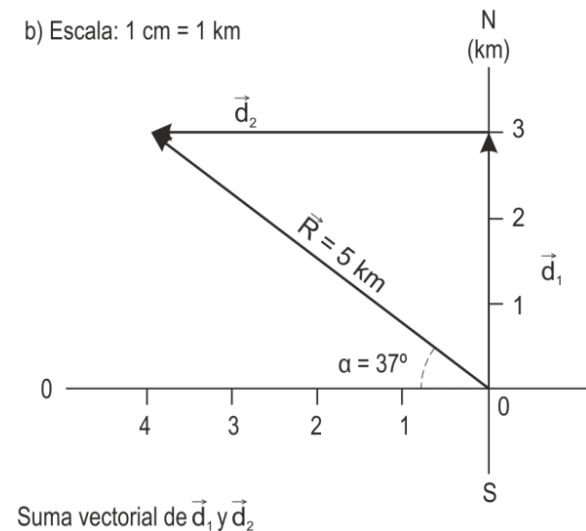
Solución a)

Como la distancia es una magnitud escalar, encontramos la distancia total recorrida al sumar aritméticamente las dos distancias:

$$d_t = d_1 + d_2 = 3 \text{ km} + 4 \text{ km} = 7 \text{ km}$$

Solución b)

Para encontrar su desplazamiento, que es una magnitud vectorial toda vez que corresponde a una distancia medida en una dirección particular entre dos puntos (el de partida y el de llegada), debemos hacer un diagrama vectorial.



Para ello, dibujamos a escala el primer desplazamiento de 3 km realizado al Norte, representado por \vec{d}_1 y después el segundo desplazamiento de 4 km al Oeste representado por \vec{d}_2 , (ver figura).

Posteriormente, unimos el origen del vector \vec{d}_1 , con el extremo del vector \vec{d}_2 , a fin de encontrar el vector resultante \vec{R} equivalente a la suma vectorial de los dos desplazamientos. El origen del vector resultante \vec{R} es el mismo que tiene el origen del vector \vec{d}_1 y su extremo coincide con el del vector \vec{d}_2 . Para calcular la magnitud de \vec{R} medimos su longitud de acuerdo con la escala utilizada y su dirección se determina por el ángulo α que forma. Así, encontramos que $\vec{R} = 5$ km con un ángulo α de 37° en dirección Noroeste.

EJEMPLO 2

Una lancha de motor efectúa los siguientes desplazamientos: 300 m al Oeste, 200 m al Norte, 350 m al Noreste y 150 m al Sur.

Calcular:

- ¿Qué distancia total recorre?
- Determinar gráficamente cuál es su desplazamiento resultante, en qué dirección actúa y cuál es el valor de su ángulo medido con respecto al Oeste.

Solución a)

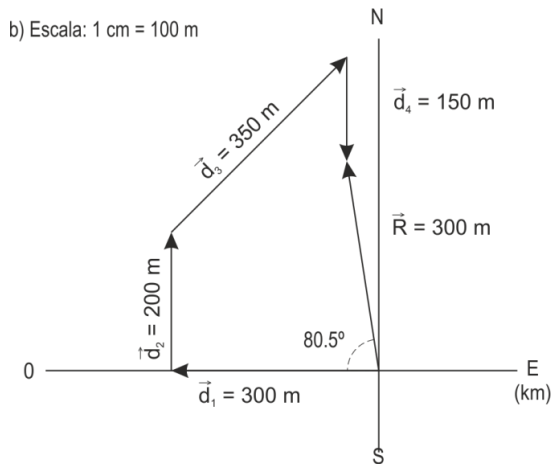
La distancia total es igual a: $d_t = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$

$$d_t = 300 \text{ m} + 200 \text{ m} + 350 \text{ m} + 150 \text{ m} = 1000 \text{ m}$$

Solución b)

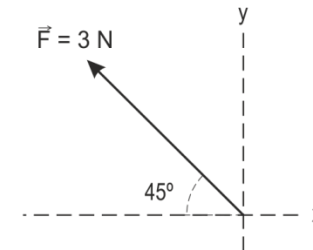
Como se ve en la figura de abajo, el desplazamiento total de la lancha es de 300 m en una dirección Noroeste que forma un ángulo de 80.5° medido con respecto al Oeste.

b) Escala: 1 cm = 100 m



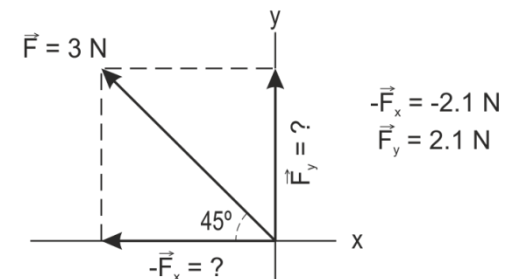
EJEMPLO 3

Encontrar en forma gráfica y analítica las componentes rectangulares o perpendiculares del siguiente vector:



Solución

Método gráfico: Escala 1 cm = 1 N



Método analítico

$$\vec{F}_y = F \text{ sen } 45^\circ = 3 \text{ N} \times 0.7071 = 2.1213 \text{ N}$$

$$-\vec{F}_x = \vec{F} \cos 45^\circ = -3 \text{ N} \times 0.7071 = -2.1213 \text{ N}$$

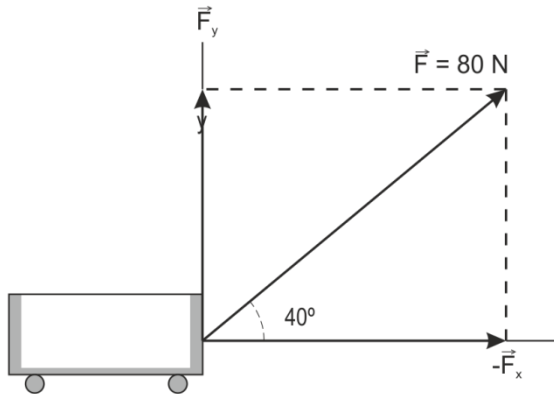
El signo menos de la componente en X, es decir $-\vec{F}_x$ se debe a que su sentido es a la izquierda.

EJEMPLO 4

Mediante una cuerda un niño jala un carro con una fuerza de 80 N, la cual forma un ángulo de 40° con el eje horizontal como se ve en la figura.

Calcular:

- El valor de la fuerza que jala al carro horizontalmente.
- El valor de la fuerza que tiende a levantar al carro.



Solución a)

La fuerza que jala al carro horizontalmente es la componente horizontal (\vec{F}_x) de la fuerza de 80 N, cuyo valor es:

$$\vec{F}_x = F \cos 40^\circ = 80 \text{ N} \times 0.7660 = 61.28 \text{ N}$$

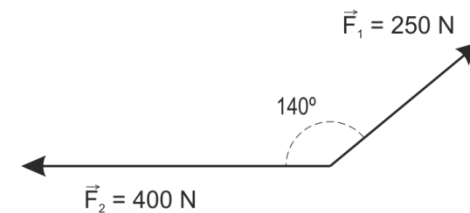
Solución b)

La fuerza que tiende a levantar al carro es la componente vertical (\vec{F}_y) de la fuerza de 80 N, cuyo valor es:

$$\vec{F}_y = F \text{ sen } 40^\circ = 80 \text{ N} \times 0.6428 = 51.42 \text{ N}$$

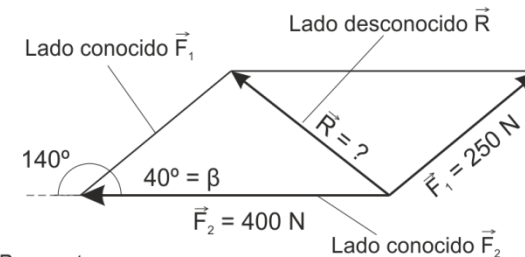
EJEMPLO 5

En la siguiente suma de vectores encontrar, por el método gráfico y analítico, la resultante y el ángulo que forma con el eje horizontal.



Solución

Método gráfico: Escala 1 cm = 100 N



Respuesta:
 $\vec{R} = 260 \text{ N}$
 $\alpha = 37^\circ$

Método analítico

Recordar: Para la ley de los cosenos debemos utilizar el ángulo formado por los dos lados conocidos en el triángulo oblicuo que estamos trabajando.

Cálculo de la resultante:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos 40^\circ}$$

$$= \sqrt{250^2 + 400^2 - 2 \times 250 \times 400 \times 0.7660}$$

$$= \sqrt{62500 + 160000 - 153200} = \sqrt{69300} = 263.25 \text{ N}$$

Cálculo del ángulo que forma la resultante:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} \quad \therefore \sin \alpha = \frac{F_1 \sin \beta}{R}$$

Sustituyendo:

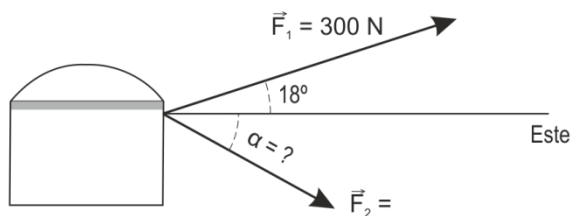
$$\sin \alpha = \frac{250 \text{ N} \times 0.6428}{263.25 \text{ N}} = 0.6104$$

$$\alpha = \text{ángulo cuyo seno es } 0.6104$$

$$\alpha = 37.6^\circ = 37^\circ 36'$$

EJEMPLO 6

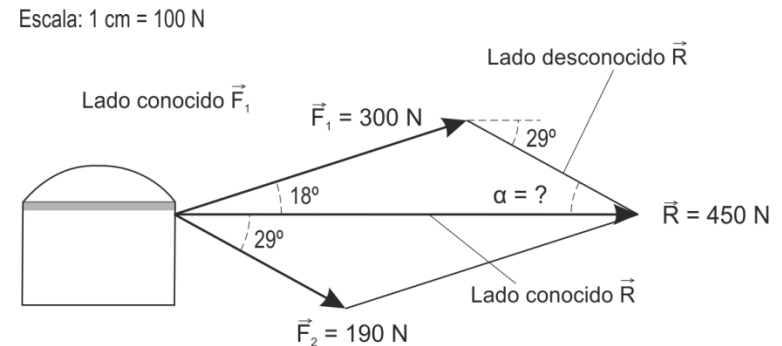
Dos personas jalan, mediante una cuerda cada una, un baúl de madera, como se ve en la figura:



Una de las personas aplica una fuerza \vec{F}_1 de 300 N con un ángulo de 18° respecto al Este. Determinar gráfica y analíticamente, la fuerza \vec{F}_2 que debe aplicar la otra persona y el ángulo que debe formar respecto al Este para que el baúl se desplace hacia el Este con una fuerza resultante de 450 N.

Solución

Método gráfico: Se establece una escala conveniente: 1 cm = 100 N. Se traza la fuerza \vec{F}_1 de 300 N con un ángulo de 18° respecto al Este. Después se traza la resultante \vec{R} cuyo valor es de 450 N dirigida al Este. Unimos el extremo de \vec{F}_1 con el extremo de \vec{R} y esta línea representará la paralela de la fuerza \vec{F}_2 buscada. Medimos su valor y el ángulo formado con respecto al Este. Trazamos con estos datos la fuerza \vec{F}_2 y encontramos un valor de 190 N con un ángulo α de 29° respecto al Este, como se ve en la siguiente figura:



Método analítico

Como desconocemos \vec{F}_2 y conocemos \vec{F}_1 y \vec{R} aplicamos la ley de los cosenos si sabemos que el ángulo formado por los dos lados conocidos en nuestro triángulo es de 18° .

$$F_2 = \sqrt{F_1^2 + R^2 - 2F_1R \cos 18^\circ}$$

$$= \sqrt{300^2 + 450^2 - 2 \times 300 \times 450 \times 0.9511}$$

$$= \sqrt{90000 + 202500 - 256797} = \sqrt{35703} = 188.95 \text{ N}$$

Cálculo del ángulo α que forma F_2 aplicando la ley de los senos:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin 18^\circ} \quad \therefore \sin \alpha = \frac{F_1 \sin 18^\circ}{F_2}$$

Sustituyendo:

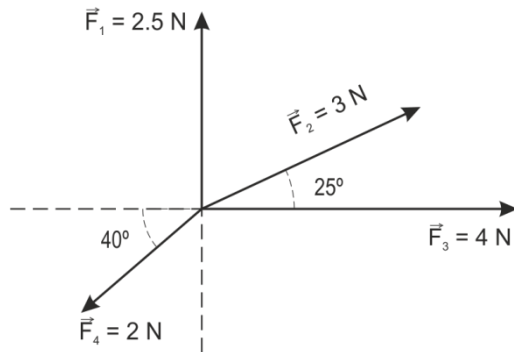
$$\text{sen } \alpha = \frac{300 \text{ N} \times 0.3090}{188.95 \text{ N}} = 0.4906$$

$\alpha =$ ángulo cuyo seno es 0.4906

$$\alpha = 29.4^\circ = 29^\circ 24'$$

EJEMPLO 7

Encontrar en forma gráfica y analítica la resultante de la suma de los siguientes vectores. Determinar también el ángulo que forma la resultante con respecto al eje horizontal.

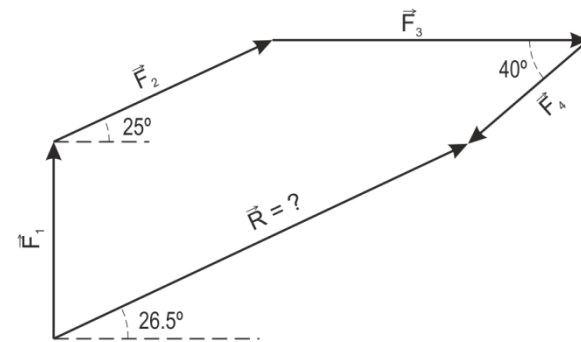


Solución

Método gráfico del polígono

Para hallar la resultante podemos tomar como base cualquiera de los cuatro vectores. Si tomamos a \vec{F}_1 , entonces trasladamos el origen de \vec{F}_2 al extremo de \vec{F}_1 ; el origen de \vec{F}_3 al extremo de \vec{F}_2 y el origen de \vec{F}_4 al extremo de \vec{F}_3 . La resultante será el vector que una el origen de \vec{F}_1 con el extremo de \vec{F}_4 :

Escala 1 cm = 1 N



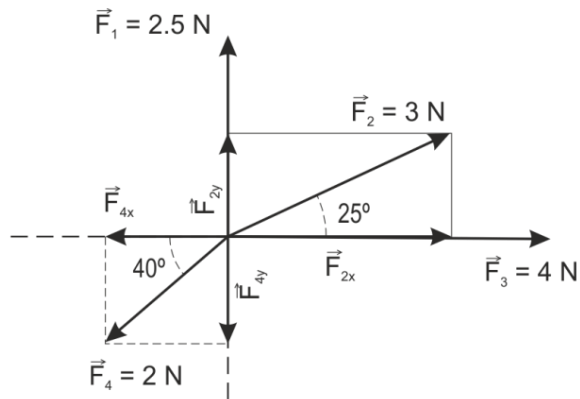
$$\vec{R} = 5.6 \text{ N}$$

$$\alpha = 26.5^\circ = 26^\circ 30'$$

Método analítico

Para encontrar la resultante por el método analítico se procede de la siguiente forma:

1. Descomponer cada vector en sus componentes rectangulares.
2. Calcular el valor de la componente en X, usando la función coseno y el valor de la componente en Y, con la función seno para cada vector. (Si la componente es horizontal a la derecha o vertical hacia arriba, es positiva. Si la componente es horizontal a la izquierda o vertical hacia abajo, es negativa).
3. Al conocer los valores de todas las componentes en X y en Y para cada vector, hacer la suma de las componentes en X y en Y, de tal forma que el sistema original de vectores se reduzca a dos vectores perpendiculares: uno, representando la resultante de todas las componentes en X y otro, representando la resultante de todas las componentes en Y.
4. Encontrar la resultante de los dos vectores perpendiculares utilizando el teorema de Pitágoras.
5. Por medio de la función tangente calcular el ángulo que forma la resultante con la horizontal. Veamos:



Al trazar las componentes rectangulares para cada vector tenemos que:

\vec{F}_1 no tiene componente horizontal, porque está totalmente sobre el eje vertical positivo.

\vec{F}_2 tiene componente horizontal y componente vertical, ambas son positivas.

\vec{F}_3 no tiene componente vertical, pues está totalmente sobre el eje horizontal positivo.

\vec{F}_4 tiene componente horizontal y componente vertical, ambas son negativas.

Cálculo de las componentes de cada vector:

$$\vec{F}_1: \vec{F}_{1x} = 0$$

$$\vec{F}_{1y} = \vec{F}_1 = 2.5 \text{ N}$$

$$\vec{F}_2: \vec{F}_{2x} = \vec{F}_2 \cos 25^\circ = 3 \text{ N} \times 0.9063 = 2.7189 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{2y} = \vec{F}_2 \sin 25^\circ = 3 \text{ N} \times 0.4226 = 1.2678 \text{ N}$$

$$\vec{F}_3: \vec{F}_{3x} = \vec{F}_3 = 4 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{3y} = 0$$

$$\vec{F}_4: -\vec{F}_{4x} = -\vec{F}_4 \cos 40^\circ = -2 \text{ N} \times 0.7660 = -1.532 \text{ N}$$

$$-\vec{F}_{4y} = -\vec{F}_4 \sin 40^\circ = -2 \text{ N} \times 0.6428 = -1.2856 \text{ N}$$

Cálculo de la resultante de la suma de todas las componentes en el eje X, es decir, \vec{R}_x

$$\vec{R}_x: \Sigma \vec{F}_x = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} + (-\vec{F}_{4x})$$

$$\vec{R}_x: 2.7189 \text{ N} + 4 \text{ N} - 1.532 \text{ N} = 5.1869 \text{ N}$$

Nota: La letra griega Σ llamada sigma indica suma.

Como se observa \vec{R}_x es positiva, esto quiere decir que es horizontal hacia la derecha.

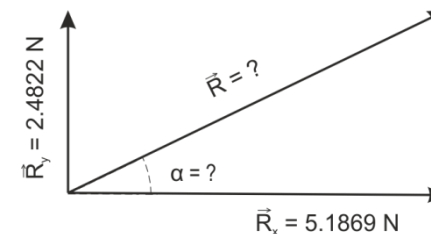
Cálculo de la resultante de la suma de todas las componentes en el eje Y es decir, \vec{R}_y :

$$\vec{R}_y: \Sigma \vec{F}_y = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + (-\vec{F}_{4y})$$

$$\vec{R}_y: 2.5 \text{ N} + 1.2678 \text{ N} - 1.2856 \text{ N} = 2.4822 \text{ N}$$

Como se observa \vec{R}_y es positiva, esto quiere decir que es vertical hacia arriba

Al encontrar \vec{R}_x y \vec{R}_y todo nuestro sistema inicial se redujo a dos vectores rectangulares:



La resultante se calcula con el teorema de Pitágoras:

$$\vec{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(5.1869)^2 + (2.4822)^2} = 5.75 \text{ N}$$

Cálculo del ángulo α formado por la resultante:

$$\tan \alpha = \frac{\vec{R}_y}{\vec{R}_x} = \frac{2.4822}{5.1869} = 0.4785$$

$\alpha =$ ángulo cuya tangente es 0.4785

$$\alpha = 25.6^\circ = 25^\circ 36'$$

Al comparar los resultados obtenidos por el método gráfico y el analítico, se observa una pequeña diferencia, la cual, como ya señalamos anteriormente, se debe a que por el método gráfico estamos expuestos a cometer varios errores al medir los vectores y los ángulos. Por tanto, la ventaja de utilizar el método analítico es que nos dará un resultado más confiable.

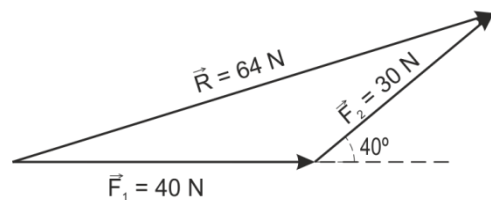
EJEMPLO 8

Encontrar por el método gráfico del triángulo la resultante de la suma de los siguientes vectores:

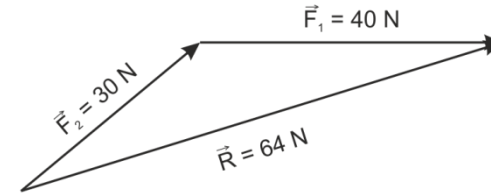


Solución

a)



b)

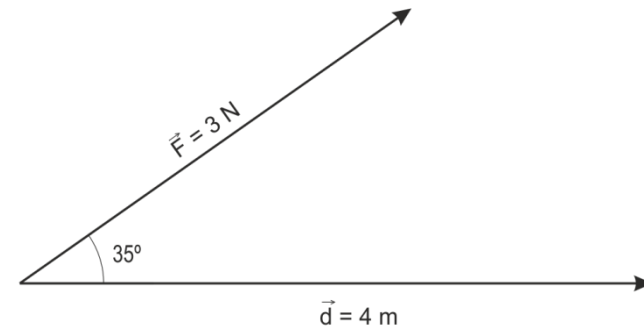


Para sumar los vectores trasladamos el origen de cualquiera de ellos al extremo del otro y la resultante será el vector que una el origen de uno con el extremo del otro. El sentido estará dirigido del origen al extremo.

Como el resultado es el mismo si trasladamos el origen de \vec{F}_2 al extremo de \vec{F}_1 o el origen de \vec{F}_1 al extremo de \vec{F}_2 , podemos comprobar que con los vectores también se cumple la Ley Conmutativa de la Adición: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$.

EJEMPLO 9

Calcular el producto escalar de los siguientes vectores:

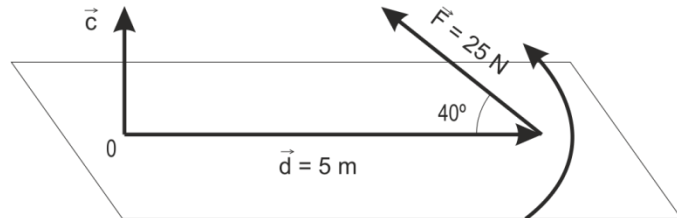


$$|\vec{F} \cdot \vec{d}| = Fd \cos 35^\circ$$

$$|\vec{F} \cdot \vec{d}| = 3 \text{ N} \times 4 \text{ m} \times 0.8192 = 9.83 \text{ Nm}$$

EJEMPLO 10

Calcular el producto vectorial de los siguientes vectores \vec{F} y \vec{d} , determinando el sentido del vector resultante \vec{c} .



Solución:

Para conocer únicamente la magnitud del resultado del producto vectorial $F \times d$, tenemos:

$$|\vec{F} \cdot \vec{d}| = Fd \sin 40^\circ$$

$$|\vec{F} \cdot \vec{d}| = 25 \text{ N} \times 5 \text{ m} \times 0.6428 = 80.35 \text{ Nm}$$

La dirección del vector resultante es perpendicular al plano de \vec{F} y \vec{d} por lo que la dirección es como si salieran de la hoja. El sentido del vector resultante se determina con la regla de la mano derecha, que a continuación se explica:

Se analiza primero la dirección que llevará la resultante, la cual resulta perpendicular al plano formado por \vec{F} y \vec{d} . Consideramos la dirección del vector resultante como si fuera un eje, alrededor de él cerramos los dedos de la mano derecha con el pulgar extendido. Las puntas de los dedos señalarán el sentido del giro producido por el efecto de la fuerza; mientras el dedo pulgar indicará el sentido del vector resultante. Como se podrá comprobar el sentido del vector resultante \vec{c} es hacia arriba, como está representado en la figura.

TRABAJO EN CLASE

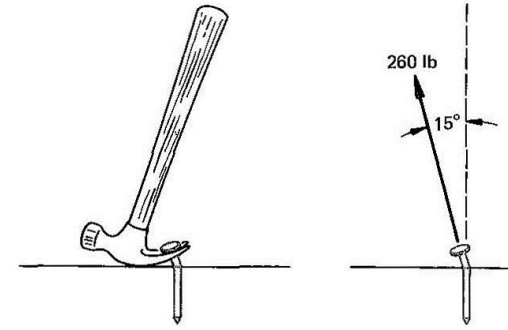
1. Defina qué es una magnitud escalar y mencione tres ejemplos.
2. Defina qué es una magnitud vectorial y nombre tres ejemplos de ellas.
3. Explique qué es un vector y cuáles son sus características.
4. Dibuje dos vectores que tengan la misma magnitud y dirección pero diferente sentido.
5. Dibuje los siguientes vectores, utilizando una escala conveniente para cada caso:
 - a. $\vec{F} = 5000 \text{ N}$ dirección vertical;
 - b. $\vec{v} = -3.5 \text{ m/s}$ dirección horizontal;
 - c. $\vec{d} = 45 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$ respecto al eje horizontal.
6. Represente en forma gráfica dos vectores coplanares y dos vectores no coplanares.
7. Explique qué es un sistema de vectores colineales y cite un ejemplo.
8. Explique qué es un sistema de vectores concurrentes y ejemplifique.
9. ¿Cómo se define la resultante de un sistema de vectores y cómo la equilibrante?

10. Dé un ejemplo en el cual se compruebe el principio de transmisibilidad del punto de aplicación de un vector.
11. Mencione en qué consiste la propiedad de los vectores libres.
12. Explique por qué no es posible sumar aritméticamente a los vectores y diga de qué manera sí se puede hacer.
13. ¿Qué diferencia existe entre distancia y desplazamiento?
14. Explique, mediante un ejemplo gráfico, en qué consiste el procedimiento llamado descomposición rectangular de un vector.
15. Describa brevemente en forma analítica cómo se encuentran las componentes rectangulares o perpendiculares de un vector.
16. ¿Por qué es más preciso emplear un método analítico que uno gráfico?
17. Explique en qué consiste el método gráfico del paralelogramo para encontrar la resultante de la suma de dos vectores concurrentes.
18. Si se le pide encontrar analíticamente la resultante y el ángulo que ésta forma con respecto al eje horizontal de dos vectores concurrentes que componen un ángulo de 90° , ¿qué conocimientos de trigonometría aplicaría?
19. Al sumar vectores concurrentes, ¿cuándo se utiliza la ley de los cosenos y la ley de los senos?
20. Al aplicar la ley de los cosenos, ¿qué ángulo nos interesa para calcular la resultante de la suma de dos vectores concurrentes?
21. Si en un triángulo oblicuángulo el ángulo que forman los dos lados conocidos mide 130° , ¿cuánto vale el coseno de 130° ?
22. Describa en qué consiste el método gráfico del polígono para encontrar la resultante de la suma de más de dos vectores concurrentes.
23. Al sumar más de dos vectores usando el método gráfico del polígono, ¿importa el orden en que se sumen los vectores? Sí o no y por qué.
24. Describa brevemente por el método analítico en qué consiste el procedimiento para encontrar la resultante de la suma de más de dos vectores concurrentes.
25. Explique cuándo se emplea el método gráfico del triángulo.

TRABAJO EN CASA

- Una mujer camina 4 km hacia el este y después camina 8 km hacia el norte. (a) Aplique el método del polígono para hallar su desplazamiento resultante. (b) Compruebe el resultado con el método del paralelogramo.
- En la superficie de Marte, un vehículo se desplaza una distancia de 38 m a un ángulo de 180° . Después vira y recorre una distancia de 66 m a un ángulo de 270° . ¿Cuál fue su desplazamiento desde el punto de partida?
- Un agrimensor inicia su tarea en la esquina sudeste de una parcela y registra los siguientes desplazamientos: A = 600 m, N; B = 400 m, O; C = 200 m, S; y D = 100 m, E. ¿Cuál es el desplazamiento neto desde el punto de partida?
- Una fuerza descendente de 200 N actúa en forma simultánea con una fuerza de 500 N dirigida hacia la izquierda. Aplique el método del polígono para encontrar la fuerza resultante.
- Las tres fuerzas siguientes actúan simultáneamente sobre el mismo objeto: A = 300 N, 30° NE; B = 600 N, 270° ; y C = 100 N hacia el este. Halle la fuerza resultante mediante el método del polígono.
- Una embarcación navega una distancia de 200 m hacia el oeste, después avanza hacia el norte 400 m y finalmente 100 m a 30° SE. ¿Cuál es su desplazamiento neto?
- Dos fuerzas A y B actúan sobre el mismo objeto y producen una fuerza resultante de 50 lb a 36.9° NO. La fuerza A = 40 lb se dirige hacia el oeste. Halle la magnitud y la dirección de la fuerza B.

- Un trineo es arrastrado con una fuerza de 540 N y su dirección forma un ángulo de 40° con respecto a la horizontal. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza descrita?
- El martillo de la figura aplica una fuerza de 260 N en un ángulo de 15° con respecto a la vertical. ¿Cuál es la componente ascendente de la fuerza ejercida sobre el clavo?



- Un río fluye hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Una embarcación desarrolla una rapidez máxima de 50 km/h en aguas tranquilas. En el río descrito, la embarcación avanza a su máxima velocidad hacia el oeste. ¿Cuáles son la velocidad y la dirección resultantes de la embarcación?
- Una persona corre al trote 2.0 mi hacia el oeste y después 6.0 mi hacia el norte. Encuentre la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante.
- Un río fluye hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Una embarcación desarrolla una rapidez máxima de 50 km/h en aguas tranquilas. En el río descrito, la embarcación avanza a su máxima velocidad hacia el oeste. ¿Cuáles son la velocidad y la dirección resultantes de la embarcación?

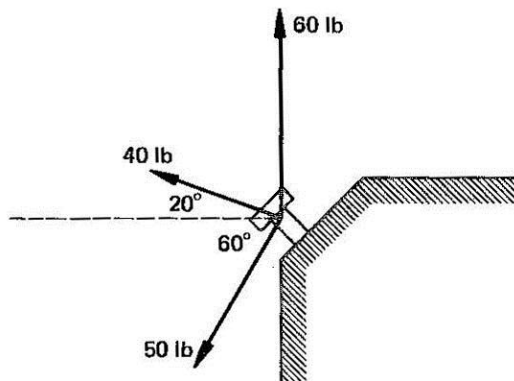
13. Una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal arrastra una caja sobre el piso. ¿Cuál tendrá que ser la tensión de la cuerda si se requiere una fuerza horizontal de 40 lb para arrastrar la caja?

14. Se necesita un empuje vertical de 80 N para levantar la parte móvil de una ventana. Se usa una larga pértiga para realizar dicha operación. ¿Qué fuerza será necesario ejercer a lo largo de la pértiga si ésta forma un ángulo de 34° con la pared?

15. La resultante de dos fuerzas A y B es de 400 N a 210° . Si la fuerza A es de 200 N a 270° , ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza B?

16. Halle la resultante de las siguientes fuerzas perpendiculares: (a) 400 N, 0° , (b) 820 N, 270° y (c) 500 N, 90° .

17. Calcule la fuerza resultante que actúa sobre el perno de la figura.



18. Cuatro cuerdas, todas las cuales forman ángulos rectos entre sí, tiran de una argolla. Las fuerzas son de 40 lb, E; 80 lb, N; 70 lb, O; y 20 lb, S. Encuentre la fuerza resultante sobre la argolla.

19. Halle los componentes xy y de (a) un desplazamiento de 200 km a 34° , (b) una velocidad de 40 km/h a 120° y (c) una fuerza de 50 N a 330° .

20. Calcule la resultante de las siguientes fuerzas aplicando el método de componentes para efectuar la suma de vectores: A = (200 N, 30°), B = (300 N, 330°) y C = (400 N, 250°).

BIBLIOGRAFÍA

- Mc Graw Hill Serway, Física Tomo II
- Publicaciones Cultural, Física General
- Prentice Hall, Wilson - Buffa, Física
- Editorial Voluntad Física Investiguemos
- Wikipedia. Enciclopedia libre Apuntes de Física Luis Alfredo Caro Fisicanet
- Ver FÍSICA OLIMPIADAS 11 (Editorial Voluntad) Ejercicios de página de Internet fuerzas mecánicas. Ejercicios y laboratorios virtuales
- PIME Editores, Física 1, Mecánica y Calorimetría
- www.educaplus.org www.ibercajalav.net/
- Santillana, Física 1 Nueva edición.
- Limusa Noriega Editores, Física Recreativa